SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. LANCONELLI

REGOLARITA' HÖLDERIANA DELLE SOLUZIONI DEBOLI DI CERTE EQUAZIONI ELLITTICHE FORTEMENTE DEGENERI

22-29 Aprile, 1982

1. Il teorema di De Giorgi, sulla hölderianità delle soluzioni deboli delle equazioni lineari ellittiche del secondo ordine a coefficienti misurabili in forma di divergenza, ha, come noto, consentito di risolvere definitivamente il problema dell'analicità degli estremali di certi funzionali che compaiono nel calcolo delle variazioni (cfr. Seminario di Miranda), ma ha dato anche un impulso decisivo allo sviluppo della teoria delle equazioni ellittiche lineari e quasi-lineari di ordine 2 a coefficienti misurabili.

Del suddetto Teorema, ottenuto in modo indipendente anche da Nash, è stata fornita da Moser una dimostrazione "semplificata", fondata su una tecnica applicabile ad ampie classi di operatori.

Una esposizione esauriente di questa teoria, insieme con ampie indicazioni bibliografiche, si può trovare, ad esempio, nella monografia di Gilbarg e Trudinger [3].

Il risultato di De Giorgi è stato esteso ad operatori ellittici degeneri e/o singolari, ad opera, soprattutto di Murty-Stampacchia, Kolodiĭ e Trudinger ([7], [5], [10]).

I risultati di questi autori sono del tipo seguente: sia

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j})$$

un operatore ellittico in un aperto Ω di R^n, con $a_{ij} = a_{ji}$ misurabili e tali che, per opportune funzioni non negative $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, risulti:

$$C_o \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2(x)\, \xi_j^2 \leqslant \sum_{i,j}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \leqslant C_1 \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2(x)\, \xi_j^2$$

dove C_o e C_1 sono costanti > 0 non dipendenti da x e da ξ.

Allora

$$(1.1)\qquad \begin{array}{l} \text{se } \lambda_j^{-1} \in L^{p_j}(\Omega) \text{ per opportuni } p_j > 1,\ j = 1,\dots,n, \\ \text{e se } (\sup_j \lambda_j / \inf_j \lambda_j) \in L^\infty(\Omega) \end{array}$$

le soluzioni deboli di $Lu = 0$ sono (localmente) hölderiane in Ω.

Ovviamente le ipotesi (1.1) non risultano soddisfatte anche in casi semplici come il seguente

$$(1.2)\qquad L_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + |x|^{2\alpha} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad \alpha > 0.$$

D'altra parte, non si può non sospettare che le soluzioni deboli di $L_\alpha u = 0$ abbiano una qualche regolarità; infatti, per un ben noto teorema di Hörmander [4], se α è un intero > 0, l'operatore (1.2) è ipoellittico e, quindi, le *distribuzioni* u *verificanti* $L u = 0$ *sono* C^∞.

In questo seminario intendo esporre alcuni risultati, ottenuti da Franchi e da me, i quali mostrano, seppure in una situazione particolare, che un approccio *di tipo geometrico*, fondato sulle proprietà delle curve integrali di certi campi vettoriali associati agli operatori, consente di ottenere risultati di regolarità hölderiana anche in casi "*fortemente degeneri*".

2. In tutto il seguito L denoterà l'operatore a coefficenti reali

$$(2.1)\qquad L = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) + a$$

dove a, a_{ij} $(= a_{ji}) \in L^\infty(R^n)$ $\quad i,j = 1,\dots,n, \qquad a \leqslant 0.$

Supponiamo che esista una n-pla $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ di funzioni *continue* e *non negative su* R^n tali che:

H-1) $$C_o \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_j^2(x)\, \xi_j^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \leqslant C_1 \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_j^2(x)\, \xi_j^2$$

$\forall x \in R^n$, $\forall \xi \in R^n$ (C_o, C_1 = costanti > 0).

Sulle funzioni λ_j facciamo le seguenti ipotesi:

H-2) $\lambda_j(x) = \lambda_j^{(1)}(x_1)\ldots\lambda_j^{(n)}(x_n)$ dove $\lambda_j^{(j)}$ è Lipshitziana in R e, per $k \neq j$, $\lambda_j^{(k)}$ è di classe $C^{(1)}$ in $R\setminus\{0\}$; inoltre $\lambda_j^{(k)}(t) = \lambda_j^{(k)}(-t)$ per ogni $t \in R$ e per ogni $k \neq j$.

H-3) Esistono delle costanti positive $\rho_{j,k}$ tali che

$$0 \leqslant x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \lambda_j(x) \leqslant \rho_{j,k}\, \lambda_j(x), \quad x \in R^n, \quad k,j = 1,\ldots,n, \quad k \neq j.$$

Osservazione 2.1. Questa ipotesi constente a λ_j di "degenerare" soltanto sugli iperpiani $x_k = 0$ con $k \neq j$ e, in sostanza, non consente degenerazioni di ordine infinito.

Se Ω è un aperto limitato di R^n indichiamo con $W_\lambda(\Omega)$ ($\overset{\circ}{W}_\lambda(\Omega)$) il completamento di $\{u \in C^\infty(\Omega) \;/\; \| u; W_\lambda(\Omega)\| < +\infty\}$ ($C_o^\infty(\Omega)$) rispetto

$$\| u; W_\lambda(\Omega)\| = (\| u; L_2(\Omega)\|^2 + \sum_{j=1}^{n} \| \lambda_j \frac{\partial u}{\partial x_j}; L_2(\Omega)\|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Al fine di dare una naturale definizione di soluzione debole dell'equazione $L\,u = f$, $f \in L_2^{loc}(\Omega)$, introduciamo la forma bilineare

$$L : W_\lambda(\Omega) \times W_\lambda(\Omega) \to R$$

definita dapprima su $(W_\lambda(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)) \times (W_\lambda(\Omega) \cap C^\infty(\Omega))$ nel modo seguente

$$L(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} - a\, u\, v \right) dx$$

e prolungata poi per continuità su $W_\lambda(\Omega) \times W_\lambda(\Omega)$ (si noti che in forza della H-1) e della limitatezza di a risulta

$$|L(u,v)| \leqslant C_1 (\| u; W_\lambda(\Omega) \| \, \| v; W_\lambda(\Omega) \|).$$

Se $v \in C_0^\infty(\Omega)$ ed u $W_\lambda^{loc}(\Omega)$ (u $W_\lambda^{loc}(\Omega)$ <=> ϕu $W_\lambda(\Omega)$ ϕ $C_0^\infty(\Omega)$) conveniamo di porre

$$L(u,v) = L(\psi\, u,\, v)$$

dove $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi \equiv 1$ sul supporto di v. E' facile riconoscere che questa definizione non dipende dalla scelta di ψ.

Definizione 2.1. Se $f \in L_2^{loc}(\Omega)$ e se $u \in W_\lambda^{loc}(\Omega)$, diremo che u è soluzione debole di L u = f in Ω se

$$(2.1) \qquad L(u,v) = - \int_\Omega f\, v\, dx \;, \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

Diremo che u è soprasoluzione (sottosoluzione) della equazione L u = f, oppure che verifica L u < f (L u > f) se

$$L(u,v) \underset{(\leqslant)}{\geqslant} - \int_\Omega f\, v\, dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega), \quad v \geqslant 0.$$

Per formulare il Teorema di hölderianità delle soluzioni deboli di L u = 0, dobbiamo dare una ulteriore definizione.

Indichiamo con e_j, j = 1,2,...,n, il versore $e_j = (0,\dots,\underset{j}{1},\dots,0)$ e poniamo $X_j = \lambda_j\, e_j$.

Una poligonale $\gamma \in C([0, T], R^n)$ diremo che è λ- ammissibile se ha un numero finito di lati, ciascuno dei quali è *curva integrale di*

uno dei campi $\pm X_1, \ldots, \pm X_n$.

Indichiamo con Λ l'insieme delle poligonali λ-ammissibili.

Definizione 2.2. Diremo che due punti di R^n, x ed y, sono *λ-connettibili* se esiste una poligonale λ-ammissibile di estremi x ed y.

Un aperto di R^n diremo che è *localmente λ-connesso* se, per ogni $x \in \Omega$ e per ogni intorno V di x, esiste un intorno W di x, contenuto in V, tale che ogni punto $y \in W$ è λ-connettibile con x mediante una poligonale $\gamma \subseteq V$.

Esempi. 2.4) Se $\lambda_j > 0$ $\forall j = 1,2,\ldots,n$, R^n è localmente λ-connesso.

2.5) Se $\lambda_1 \equiv 1$ e $\lambda_2(x,y) = |x|^\alpha$ $(\alpha > 0)$ allora R^2 è localmente $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$-connesso.

2.6) Se $\lambda_1 \equiv 1$, $\lambda_2(x,y,z) = |x|^\alpha$, $\lambda_3(x,y,z,) = |x|^{\alpha'}|y|^\beta$ $(\alpha,\alpha',\beta > 0)$ allora R^3 è localmente $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$-connesso.

2.7) Sia $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ con $\lambda_1 \equiv 1$ e $\lambda_2(x,y) = \max(0, x)$.
In questo caso due punti qualsiasi di R^2 sono λ-connettibili, ma, ad esempio, l'aperto

$$\Omega_0 = \{(x,y) \in R^2 / x < 0\}$$

non è localmente λ-connesso.

2.8) Sia $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ con $\lambda_1(x,y) = |x|$ e $\lambda_2(x,y) = |y|$.
Gli aperti $\Omega_1 = \{(x,y) \in R^2 / x > 0,\ y > 0\}$ e $\Omega_2 = \{(x,y) \in R^2 / x > 0,\ y < 0\}$ sono localmente λ-connessi.
L'aperto $\Omega_0 = \{(x,y) \in R^2 / x > 0\}$ non è localmente λ-connesso.

2.9) Se $\lambda_j \in C^\infty(R^n)$ $\forall j = 1,2,\dots,n$, ogni aperto di R^n è localmente λ-connesso se il rango dell'algebra di Lie generata da $X_1,\dots,X_n$ è uguale ad n in ogni punto di R^n (Teorema di Chow; si veda, ad esempio, [7]).

Vale il seguente

Teorema 2.1. Se Ω è un aperto di R^n localmente λ-connesso, ogni funzione $u \in W_\lambda^{loc}(\Omega)$, soluzione debole di $L\, u = 0$, è localmente hölderiana in Ω.

Una tappa essenziale nella dimostrazione del Teorema 2.1 è costituita dalla seguente generalizzazione della classica disuguaglianza di Harnack.

Teorema 2.2. Sia Ω un aperto di R^n connesso e localmente λ-connesso. Sia $u > 0$, soluzione debole di $L\, u = 0$ in Ω. Allora, per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ esiste una costante $C = C(K) > 0$ tale che

$$\sup_K u < C \inf_K u.$$

La dimostrazione dei Teoremi 2.1 e 2.2 è stata da noi conseguita adattando alla presente situazione la tecnica introdotta da Moser nel caso ellittico e combinando questa con una opportuna estensione del *Lemma di John-Nirenberg* sulle funzioni ad oscillazione media limitata.

Il nostro procedimento poggia su tre punti, essenzialmente:

a) proprietà di una distanza d su R^n che risulta "naturale" per L così come la distanza euclideo è naturale per l'operatore di Laplace;

b) un Teorema di immersione dello spazio $\overset{\circ}{W}_\lambda$ in un opportuno L^q, con $q > 2$;

c) un lemma, che estende quello "classico" di John-Nirenberg, relativo

alle funzioni ad oscillazione media limitata rispetto alle sfere della distanza d.

3. La distanza d. Allo scopo di fornire una giustificazione della definizione di distanza che daremo nel corso di questo paragrafo, supponiamo dapprima che ogni funzione λ_j sia C^∞ è strettamente positiva.

In questo caso si può definire su R^n una struttura di varietà riemanniana generata dalla forma bilineare

$$g(x;\xi,\eta) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{-2}(x)\, \xi_j\, \eta_j$$

Se con ∇_λ indichiamo l'operatore "gradiente" relativo a tale struttura, risulta

$$|\nabla_\lambda f|_g^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2(x) \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right)^2.$$

Questa espressione è, esattamente, quella che figura nella definizione della norma dello spàzio $W_\lambda(\Omega)$.

La forma bilineare g appare quindi più calzante all'operatore L di quanto non lo sia il prodotto interno euclideo; risulta naturale pensare che ciò accada anche per le rispettive distanze.

Ora, la metrica riemanniana generata da g è così definita $(x,y \in R^n)$:

$$d_r(x,y) = \inf\{r(\gamma)/\gamma \in C^{(1)}([0,T],\, R^n),\ \gamma(0) = x,\ \gamma(T) = y\},$$

dove

$$r(\gamma) = \int_0^T |\gamma'(T)|_g\, dt = \int_0^T \left(\sum_{j=1}^{n} (\gamma_j'(t)/\lambda_j(\gamma(t)))^2\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

In particolare, se γ è una curva integrale di uno dei campi $X_1,\dots,X_n$, ad esempio se $\gamma'(t) = X_k(\gamma(t))$, risulta $|\gamma'(t)|_g \equiv 1$ e, quindi, $r(\gamma) = T$.

Più in generale, se $\gamma \in C([0,T], R^n)$ è una poligonale λ-ammissibile, allora $r(\gamma) = T$. D'altra parte si può provare che d_r è equivalente, con costanti dipendenti solo da n e dalle costanti di Lipshitz di λ_j rispetto ad x_j, $j = 1,2,\dots,n$, alla distanza d_λ così definita:

$$d_\lambda(x,y) = \inf\{r(\gamma)/\gamma \in C(\ 0,T\ ;\ R^n),\ \gamma \in \Lambda,\ \gamma(0) = x,\ \gamma(T) = y\} =$$
$$= \inf\{T/\ \exists\gamma \in \Lambda : \gamma \in C([0,T],\ R^n),\ \gamma(0) = x,\ \gamma(T) = y\}$$

Queste osservazioni suggeriscono di associare all'operatore L, in generale, la "distanza" d_λ definita come nelle righe precedenti:

$$d_\lambda(x,y) = \inf\{T \in R/T > 0, \exists\gamma \in C([0,T],\ R^n),\ \gamma \in \Lambda :\ \gamma(0) = x,\ \gamma(T) = y\} \tag{3.1}$$

Ovviamente, l'insieme che figura al secondo membro della (3.1) è $\neq \emptyset$ se, e solo se, x ed y sono λ-connettibili e d_λ è *una distanza su ogni aperto connesso e localmente* λ*-connesso di* R^n.

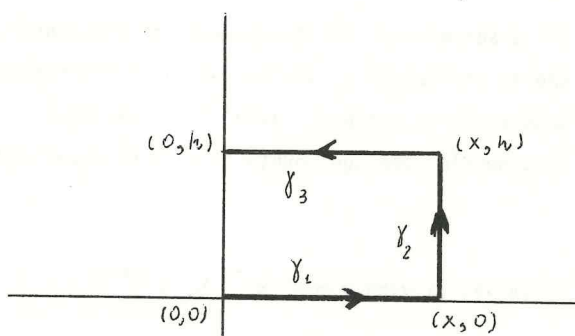
Nel caso in cui $a_{i,j}$, $a \in C^\infty(R^n)$, distanze modellate sull'operatore L in modo analogo a quello descritto qui sopra, sono state utilizzate, molto recentemente, da Nagel-Stein-Wainger e Fefferman-Phong ([8], [2]).

Esempi. 3.1. Se $X_j \in C^\infty(R^n, R^n)$, $j = 1,2,\dots,n$, e se il rango dell'algebra di Lic generata da $X_1,\dots,X_n$ è uguale ad n in ogni punto di R^n, per ogni compatto $K \subseteq R^n$ esistono una costante positiva $C = C(K)$ ed un intero $\geqslant 0$ $m = m(K)$, tali che

$$d_\lambda(x,y) \leqslant C|x - y|^{\frac{1}{m+1}} \tag{3.2}$$

(m = ordine dei commutatori di $X_1,\dots,X_n$ necessari per generare n-vettori linearmente indipendenti).

La (3.2) si può provare utilizzando la formula di Campbell-Hansdorff come, ad esempio, in [4] pag. 163.

3.2. Siano $\lambda_1 \equiv 1$ e $\lambda_2(x,y) = |x|^\alpha$, $\alpha > 0$. Valutiamo la distanza d_λ di $(0,0)$ da $(0,h)$, $h > 0$.

Sia γ la poligonale λ-ammissibile indicata in figura. Parametrizziamo i seguenti γ_1, γ_2, γ_3 in modo tale che le parametrizzazioni ottenute siano curve integrali di $\pm(1,0)$ o di $\pm(0, |x|^\alpha)$:

$$\gamma_1(t) = (t,o),\ o \leqslant t \leqslant x;$$

$$\gamma_2(t) = (x, x^\alpha t),\ o \leqslant t \leqslant h\, x^{-\alpha};$$

$$\gamma_3(t) = (t,\ h),\ o \leqslant t \leqslant x.$$

Allora $r(\gamma) = 2\,x + h\,x^{-\alpha}$. La funzione $x \to 2\,x + h\,x^{-\alpha}$ ha minimo nel punto $x = (\alpha\, h/2)^{1/\alpha+1}$ ed il minimo vale

$$2\left(\frac{\alpha\, h}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} + \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} h^{1-\frac{\alpha}{\alpha+1}} = C(\alpha)\, h^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

Pertanto

$$(3.3) \qquad d_\lambda((0,0),(0,h)) \leqslant C(\alpha)\, h^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

Ora si può provare che in (3.3) vale proprio il segno = in quanto, per ogni curva γ λ-ammissibile che connette $(0,0)$ e $(0,h)$, esiste una curva γ_0 del tipo precedente tale che $r(\gamma_0) \leqslant r(\gamma)$.

(*) Osservazione. Per quanto vedremo più avanti, è interessante notare che la poligonale γ_0 che minimizza $r(\gamma)$ è costituita da lati *aventi "λ-lunghezze" equivalenti* (ad $h^{1/\alpha+1}$) *fra loro*.

In generale, per ogni punto $(x,y) \in R^2$ e per ogni $h > 0$ risulta:

$$d_\lambda((x,y),\ (x,y+h)) \cong \min\{|x|^{-\alpha}\, h,\ h^{1/\alpha+1}\}.$$

Si può ben capire che la distanza d_λ non risulta sempre così facilmente valutabile come nell'esempio 3.2.

D'altra parte, come vedremo più avanti, la tecnica da noi impiegata richiede, fra l'altro, una stima della misura (di Lebergue) delle sfere di d_λ difficilmente ottenibile senza una conoscenza abbastanza esplicita della distanza stessa.

Per questo motivo noi abbiamo sostituito a d_λ una *pseudo-distanza* d costruita con un procedimento suggerito dalla Osservazione (*).

Se, per ogni $x \in R^n$, indichiamo con

$$t \to e^{tX_j}(x) \qquad (j = 1,2,\dots,n),$$

la curva integrale di X_j uscente da x, si ha il seguente

Lemma 3.1. Supponiamo R^n localmente λ-connesso. Allora, per ogni $k = 1,2,\dots,n$, esistono $p = p(k)$ funzioni $\phi_j^{(k)}: R^n \times R^+ \to R$ tali che, per opportuni $i_1,\dots,i_p \in \{1,\dots,n\}$, risulta

$$x + te_k = (e^{\phi_p(x,t)X_{i_p}} \circ \dots \circ e^{\phi_1(x,t)X_{i_1}})(x)$$

per ogni $x \in R^n$ e per ogni $t \in R^+$.

Esiste inoltre una costante $C > 0$ tale che

$$\frac{1}{C} |\phi_i^{(k)}(x,t)| \leqslant |\phi_j^{(k)}(x,t)| \leqslant C\, |\phi_i^{(k)}(x,t)| \tag{3.4}$$

per ogni $x \in R^n$, per ogni $t \in R$, per ogni $i,j = 1,\dots,n$.

Per la dimostrazione di questo lemma facciamo uso in modo essenziale delle ipotesi H-2 ed H-3.

Ovviamente le curve

$$\gamma : s \to e^{sX_{i_j}}(x^{(j)}),\quad s \in \text{interv}(0,\phi_j^{(k)}(x,t)),$$

dove $x^{(1)} = x$ e $x^{(j)} = e^{\phi_{j-1}^{(k)}(x,t)X_{i_{j-1}}}(x^{(j-1)})$ per $j = 2,\dots,p$, sono λ-ammissibili e, quindi,

$$d_\lambda(x,x+te_k) \leqslant \sum_{j=1}^{p} |\phi_j^{(k)}(x,t)|$$

Per la (3.4), posto $\Phi^{(k)} = |\phi_1^{(k)}|$, risulta

$$\frac{p}{C}\,\Phi^{(k)} \leqslant \sum_{j=1}^{p} |\phi_j^{(k)}| \leqslant p\, C\, \Phi^{(k)}$$

Noi assumeremo $\Phi^{(k)}(x,t)$ come "distanza" di x da $x + te_k$ (Cfr. Es. 3.2).

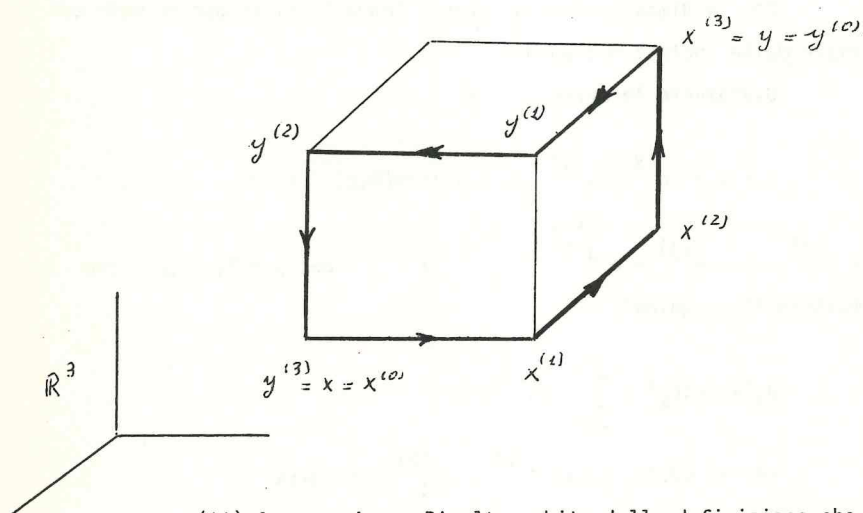
Definizione 3.1. Siano x ed $y \in R^n$.

Se $y = x + te_k$, per un opportuno $k = 1,2,\dots,n$, poniamo

$$d(x,y) = \begin{cases} \Phi^{(k)}(x,t), & \text{se } t \geqslant 0 \\ \Phi^{(k)}(y,-t), & \text{se } t \leqslant 0 \end{cases}$$

Se $y = x + h$ poniamo

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \left(d(x^{(k-1)}, x^{(k)}) + d(y^{(k-1)}, y^{(k)}\right)$$

dove $x^{(o)} = x$ e $x^{(k)} = x + h_1 e_1 + \dots + h_k e_k$ per $k = 1,2,\dots,n$; $y^{(o)} = y$ e $y^{(k)} = y - h_1 e_1 - \dots - h_k e_k$ per $K = 1,2,\dots,n$.

(**) Osservazione. Risulta subito dalla definizione che $d_\lambda < d$. Nel caso dell'esempio 3.2 si può provare che è $d_\lambda \cong d$.

La funzione d così definita è una *pseudo-distanza*. Infatti:

Proposizione 3.1. i) $d(x,y) \geqslant 0$, $= 0 \Leftrightarrow x = y$;

ii) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in R^n$;

iii) per ogni compatto $K \subseteq R^n$ esiste $C = C(K) > 0$ tale che

$$d(x,y) < C(d(x,z) + d(z,y)) \qquad \forall\, x,y,z \in K.$$

Dalle ipotesi sulle λ_j, in particolare dalla H-3, segue inoltre la disuguaglianza

$$(3.5) \qquad d(x,y) \leqslant C\,|x - y|^{\sigma}, \qquad x,y \in K,$$

dove K è un (qualunque) compatto di R^n e $C = C(K) > 0$, $\sigma = \sigma(K) > 0$.

Osserviamo che l'*ipotesi H-3* è, in una qualche misura, *necessaria* per la validità di (3.5). L'esempio seguente chiarisce il senso di questa affermazione.

Esempio 3.3. Siano $\lambda_1 \equiv 1$ e $\lambda_2(x,y) = b(x)$, con $b \in C^{\infty}(R)$. Mostriamo che, se vale (3.5), allora esiste $m > 0$ tale che $\frac{d^m b}{dx^m}(o) \neq 0$ e, quindi, λ_2 verifica H-3 in un intorno di (0,0).

Ragioniamo per assurdo e supponiamo $\frac{d^m b}{dx^m}(o) = 0$ per ogni $m > 0$. Allora, preso $m > \frac{1}{\sigma}$, si ha:

$$b(x) < C_m|x|^m \qquad \forall\, x \in\,]-1, 1[\,, \; C_m > 0.$$

Pertanto, se $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ con $\mu_1 \equiv 1$ e $\mu_2(x,y) = C_m|x|^m$, risulta $d_\lambda / W \times W \geqslant d_\mu / W \times W$, dove W è un opportuno intorno di (0,0). Dalla (3.5), allora, si trae:

$$C\,h^{\sigma} \geqslant d((0,0), (0,h)) \geqslant C_1\, d_\lambda((0,0), (0,h)) \geqslant$$

$$\geqslant C_1\, d_\mu((0,0), (0,h)) = (\text{Cfr. Es. } 3.2) =$$

$$= C_1(m)\, h^{\frac{1}{m+1}}\;;$$

per ogni $h > 0$ e sufficientemente piccolo. Ciò è assurdo perché $\sigma > (\frac{1}{m} >) \frac{1}{m+1}$.

La pseudo-distanza d ha un'altra importante proprietà. Infatti, se con $S(x,\rho)$ indichiamo la sfera

$$S(x,\rho) = \{y \in R^n / d(x,y) < \rho\}$$

si ha:

Proposizione 3.2. Per ogni compatto $K \subseteq R^n$ e per ogni $\rho_0 > 0$ esiste una costante $A = A(K, \rho_0) > 0$ tale che

$$\mu(S(x,2\rho)) \leqslant A\, \mu(S(x,\rho)), \quad \forall x \in K, \quad \forall \rho < \rho_0,$$

dove μ è la misura di Lebesgue in R^n.

Dalle Proposizioni 3.1 e 3.2 e dal Teorema 2.2-III di [1] si deduce subito il seguente Lemma di scomposizione (di tipo Calderon-Zygmund).

Lemma 3.2. Sia $f \in L_1(R^n)$ una funzione $\geqslant 0$ e a supporto compatto K. Se $\alpha > \| f; L_1(R^n)\| / \mu(K)$ allora esiste una successione di sfere $(S(x^{(i)}, r^{(i)})$ tale che

i) $f(x) \leqslant \alpha C$ q.d. su $R^n \setminus \cup S(x^{(i)}, r^{(i)})$;

ii) $(\mu(S(x^{(i)}, r^{(i)})))^{-1} \int_{S(x^{(i)},r^{(i)})} f d\mu \leqslant C\alpha$;

iii) $\sum_i \mu(S(x^{(i)},r^{(i)})) \leqslant \frac{C}{\alpha} \int_{R^n} f d\mu$;

iv) un punto $x \in R^n$ non può appartenere a più di M sfere $S(x^{(i)},r^{(i)})$

$(C = C(K) > 0, \quad M = M(K) \in N)$.

Questo risultato, a sua volta, consente di provare, procedendo come in [6], la seguente estensione del Lemma di John-Nirenberg sulle funzioni a oscillazione media limitata.

Proposizione 3.3. Sia $u \in L^{\infty}(R^n)$ con $\inf u > 0$.

Supponiamo che $w = \log u$ sia ad oscillazione media limitata rispetto alle sfere $S(x,\rho)$: esista cioè una costante $C > 0$ tale che

$$\int_{S(x,\rho)} |w - w_S| \, d\mu \leqslant C \, \mu(S(x,r))$$

per ogni $x \in R^n$ e per ogni $\rho \leqslant \rho_o$, dove $\rho_o > 0$ e

$$w_S = \frac{1}{\mu(S(x,r))} \int_{S(x,r)} w d\mu$$

Allora esistono $p_o > 0$ e $M > 0$ tali che, per ogni $x \in R^n$, per ogni $p \in]0, p_o[$ e per ogni $\rho < \rho_o$, risulta

$$\left(\int_{S(x,\rho)} u^p \, d\mu\right) \left(\int_{S(x,\rho)} u^{-p} \, d\mu\right) \leqslant M.$$

La distanza d, infine, risulta localmente lipschitziana rispetto ai campi $X_1,\dots,X_n$, in analogia con la lipschitzianità "classica" (rispetto, cioè, ai campi $\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}$) della distanza euclidea.

Infatti:

Proposizione 3.4. Per ogni compatto $K \subset R^n$ esiste una costante positiva $C = C(K)$ tale che

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} d(y,x)| \leqslant C, \quad \forall x,y \in K.$$

4. Un Teorema di immersione per lo spazio $\overset{\circ}{W}_\lambda(\Omega)$. La fattorizzazione delle traslazioni lungo rette parallele agli assi coordinati fornita dal Lemma 3.1, consente di provare il seguente Teorema di immersione.

Teorema 4.1. Sia Ω_1 un aperto di R^n localmente λ-connesso e sia $\Omega \subseteq \overline{\Omega} \subseteq \Omega_1$ un aperto limitato. Esiste allora $\varepsilon_0 > 0$ tale che $\overset{\circ}{W}_\lambda(\Omega)$ è immerso con continuità in $\overset{\circ}{H}{}^\varepsilon(\Omega)$ $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ (H^ε indica l'ordinario spazio di Sobolev di ordine ε).

Osservazioni. 1) Il numero ε_0 che figura nel Teorema di immersione si può scrivere esplicitamente in termini delle costanti $\rho_{j,k}$ dell'ipotesi H-3. Ad esempio, se $n = 2$, $\varepsilon_0 = \min \{\frac{1}{1+\rho_{1,2}}, \frac{1}{1+\rho_{2,1}}\}$.

2) Se $\lambda_j \in C^\infty$ $\forall j = 1,2,\dots,n$, un recente risultato di Fefferman e Phong ([2]) afferma che l'immersione

$$\overset{\circ}{W}_\lambda(\Omega) \hookrightarrow \overset{\circ}{H}{}^\varepsilon(\Omega)$$

si ha *se, e solo se*, risulta

$$d_\lambda(x,y) \leqslant C\,|x-y|^\varepsilon \tag{4.1}$$

per ogni $x,y \in \Omega$ ($C = C(\Omega, \Omega_1)$; in (4.1) ε è, per sua natura, < 1).

Ma allora (Cfr. Es. 3.3) l'ipotesi H-3) è, in una qualche misura, necessaria per la validità del Teorema 4.1.

A scopo illustrativo proviamo il Teorema nel caso particolare di $n = 2$, $\lambda_1 \equiv 1$ e $\lambda_2(x,y) = |x|^\alpha$, $\alpha > 0$.

E' immediato riconoscere che si ha

$$\int_0^1 \left(\int_{R^2} \frac{|u(x+h,y)-u(x,y)|^2}{h^{1+2\varepsilon}}\, dx\, dy \right) dh \leqslant \| \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x}; L_2(R^n) \| \tag{4.2}$$

$\forall u \in C_0^\infty(R^n)$ e per ogni $\varepsilon \in]0, 1[$.

Fissiamo ora $\varepsilon \in]0, \frac{1}{\alpha+1}[$ (si noti che, essendo $xD_1\lambda_2(x,y) = \alpha\lambda_2$ risulta $\rho_{2,1} = \alpha$) e consideriamo il rapporto incrementale integrale di ordine ε

$$(4.3) \qquad I = \int_0^1 \left(\int_{R^2} \frac{|u(x,y+h)-u(x,y)|^2}{h^{1+2\varepsilon}} dx\, dy \right) dh, \quad u \in C_o^\infty(R^n).$$

Preliminarmente fattorizziamo la traslazione $(x,y) \to (x,y+h)$ conformemente al Lemma 3.1.

Risulta $(X_1 = (1,0),\ X_2 = (0, |x|^\alpha))$

$$(4.4) \qquad (x,y+h) = e^{-\phi X_1}\ e^{\phi X_2}\ e^{\phi X_1}(x,y)$$

dove $\phi = \phi(x,y,h)$ è l'unica soluzione $\geqslant 0$ dell'equazione

$$(4.4') \qquad (x+\phi)^\alpha\, \phi = h,$$

se $x \geqslant 0$, e dell'equazione

$$(4.4'') \qquad (-x-\phi)^\alpha\, \phi = h,$$

se $x \leqslant 0$.

Si noti che $\phi^{\alpha+1} \leqslant |x+\phi|^\alpha\, \phi$ e che, quindi,

$$(4.5) \qquad \phi(x,y,h) \leqslant h^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$

Posto $R^2_+ = \{(x,y) \in R^2/x > 0\}$ e $R^2_- = \{(x,y) \in R^2/x < 0\}$ risulta

$$I = \int_0^1 \int_{R^2_+} (\cdot) + \int_0^1 \int_{R^2_-} (\cdot) = I^+ + I^-.$$

Valutiamo I^+. Si ha

$$I^+ \leqslant c\Big(\int_0^1 \int_{R^2_+} \frac{|u(x,y+h)-u(x+\phi,y+h)|^2}{h^{1+2\varepsilon}}\, dx\, dy\, dh +$$

$$\int_0^1 \int_{R^2_+} \frac{|u(x+\phi,y+h)-u(x+\phi,y)|^2}{h^{1+2\varepsilon}}\, dx\, dy\, dh\Big) =$$

$$= I_1^+ + I_2^+ + I_3^+ .$$

Ora

$$I_2^+ = \int_0^1 \int_{R^2_+} h^{-(1+2\varepsilon)}\, \Big|\int_0^h D_2u(x+\phi,y+s)ds\Big|^2\, dx\, dy\, dh <$$

$$< \int_0^1 \int_{R_2^+} \int_0^h |D_2u(x+\phi,y+s)|^2\, h^{-2\varepsilon}\, ds\, dx\, dy\, dh =$$

$$= \int_0^1 \int_{R_2^+} h^{-(1+2\varepsilon)} \int_0^h |(\lambda_2 D_2 u)(x+\phi,y+s)|^2\, \frac{h}{|x+\phi|^{2\alpha}}\, ds\, dx\, dy\, dh =$$

$$= \int_0^1 h^{-(1+2\varepsilon)} \int_{R_2^+} |(\lambda_2 D_2 u)(x+\phi,y)|^2 \cdot \Big(\frac{h}{|x+\phi|^{\alpha}}\Big)\, dx\, dy\, dh$$

$$\leqslant \text{(Cfr. (4.4'), (4.4") e (4.5))} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 h^{-1+2(\frac{1}{\alpha+1} - \varepsilon)} \Big(\int_{R_2^+} |\lambda_2 D_2 u(x+\phi,y)|^2\, dx\, dy\Big)\, dh$$

Eseguiamo ora il cambiamento di variabile $x+\phi(x,h) = x'$. Poiché $(1 + \frac{\partial\phi}{\partial x})dx = dx'$ e poiché (Cfr. (4.4') e (4.4"))

$$1 + \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{1 + \alpha \frac{\phi|x+\phi|^{\alpha-1}}{|x+\phi|^{\alpha}}} \geqslant \frac{1}{1+\alpha},$$

risulta

$$I_2^+ \leqslant (1+\alpha) \int_0^1 h^{-1+2(\frac{1}{\alpha+1} - \varepsilon)} \left(\int_{R_2^+} |\lambda_2 D_2 u|^2 \, dx\, dy \right) dh =$$

$$= C(\alpha, \varepsilon) \int_{R_2^+} |\lambda_2 D_2 u|^2 \, dx\, dy$$

Valutiamo ora I_3^+.

$$I_3^+ = \int_0^1 h^{-(1+2\varepsilon)} \int_{R_2^+} \left| \int_0^{\phi} D_1 u(x+s,y) ds \right|^2 dx\, dy\, dh \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 h^{-(1+2\varepsilon)} \int_{R_2^+} \int_0^{\phi} |D_1 u(x+s,y)|^2 \, ds\, \phi\, dx\, dy\, dh \leqslant$$

$$\leqslant (\text{Cfr. } (4.5)) \leqslant \int_0^1 h^{-(1+2\varepsilon)} \int_{R_+^2} \int^{h^{1/\alpha+1}} |D_1 u(x+s,y)|^2 \cdot$$

$$\cdot\, ds\, h^{1/\alpha+1} \, dx\, dy\, dh$$

$$= \int_0^1 h^{-1+2(\frac{1}{\alpha+1} - \varepsilon)} \int_{R_+^2} |D_1 u(x,y)|^2 \, dx\, dy\, dh =$$

$$= C(\alpha, \varepsilon) \int_{R_+^2} |D_1 u(x,y)|^2 \, dx\, dy.$$

Analogamente si valuta I_1^+. In definitiva si ottiene

$$(4.6) \qquad I^{+} \leqslant C(\|\lambda_1 D_1 u;\ L_2(R^2)\| + \|\lambda_2 D_2 u;\ L_2(R^2)\|).$$

Con la medesima tecnica si riconosce che anche I^{-}, e quindi I(Cfr. (4.3)), si valuta col secondo membro di (4.6).

Osservazione. Dalle (4.4') e (4.4") si deduce anche la seguente stima per la funzione ϕ:

$$|x|^{\alpha}\ \phi < |x+\phi|^{\alpha}\ \phi = h\ .$$

Quindi, anche per la (4.5),

$$\phi(x,y,h) \leqslant \min\ \{h^{\frac{1}{\alpha+1}},\ \frac{h}{|x|^{\alpha}}\}\ .$$

Allora, se nella dimostrazione precedente si utilizza questa stima di ϕ al posto della (4.5), si riconosce che l'immersione vale anche per $\varepsilon = \frac{1}{\alpha+1}$.

Notiamo che, in effetti, abbiamo l'immersione

$$\overset{\circ}{W}_{\lambda}(\Omega) \hookrightarrow \overset{\circ}{H}{}_2^{1,\frac{1}{\alpha+1}}(\Omega)\ .$$

5. Dimostrazione dei Teoremi 2.1 e 2.2. Nel corso del paragrafo Ω indicherà sempre un aperto di R^n connesso, localmente λ-connesso e limitato. Per semplicità supporremo R^n localmente λ-connesso.

Seguendo il metodo di Moser procediamo dimostrando, nell'ordine, i seguenti Teoremi.

Teorema 5.1. (Locale limitatezza superiore delle sottosoluzioni).

Sia $u \in W_{\lambda}^{loc}(\Omega)$ tale che $Lu \geqslant 0$. Allora, per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $\rho > 0$ tale che $S(x,4\rho) \subset \Omega$ risulta

$$\sup_{S(x,\rho)} u \leqslant M_p(\rho) \| u; L_p(S(x,2\rho)) \| , \quad \forall p > 1.$$

$(M_1(\rho) \equiv M_1(\rho,p))$.

Teorema 5.2. Sia $u \in W_{\lambda}^{loc}(\Omega)$, $u \geqslant 0$, u limitata e tale che $Lu < 0$. Allora, per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $\rho > 0$ tale che $S(x,4\rho) \subseteq \Omega$ risulta

$$\inf_{S(x,\rho)} u \geqslant M_2(\rho) \| u; L_p(S(x,2\rho)) \| , \quad \forall p \in [1, p^*[,$$

dove $p^* > 1$ non dipende da $\rho (M_2(\rho) \equiv M_2(\rho,p))$.

La dimostrazione di questi due Teoremi si può condurre parallelamente, dopo aver mostrato che $Lu \geqslant 0 \Rightarrow Lu^+ \geqslant 0$, $u^+ = \max(o,u)$.

Osserviamo inoltre che è sufficiente mostrare il Teorema 5.2 nell'ipotesi $u \geqslant k > 0$; infatti, se $Lu < 0$ anche $L(u+K) < 0$ in quanto $a < 0$.

Dalle definizioni di sotto e sopra soluzione si ricava

$$(5.1) \qquad L(u,v) \begin{cases} \leqslant 0, & \text{se } Lu \geqslant 0 \\ \geqslant 0, & \text{se } Lu \leqslant 0 \end{cases} , \forall v \in \overset{\circ}{W}_{\lambda}(\Omega), \quad v \geqslant 0.$$

Ora, se $\eta \in C_0^{(1)}(\Omega)$ e $N > 0$, poniamo

$$(5.2) \qquad \begin{cases} v = \begin{cases} \eta\, u^{\beta}, & \text{se } u \leqslant N \\ \eta(N^{\beta} + \beta N^{\beta-1}(u-N)), & \text{se } u \geqslant N \end{cases} , & \text{se } u \geqslant 0 \text{ e } \beta > 0 \\ v = \eta\, u^{\beta}, \quad \text{se } u \geqslant k > 0 \text{ e } \beta < 0 \end{cases}$$

Si riconosce subito che $v \in \overset{\circ}{W}_\lambda(\Omega)$. Sostituendo nella (5.1) (la prima nella prima e la seconda nella seconda), dopo alcune elementari semplificazioni e dopo aver mandato N a $+\infty$ (nel caso $\beta > 0$) si ottiene

$$(5.3) \qquad \int_{R^n} |\eta \nabla_\lambda w|^2 d\mu \leq \begin{cases} C\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)^2 \int_{R^n} |\nabla_\lambda \eta|^2 w^2 \, dx, & \text{se } \beta \neq -1 \\ C \int_{R^n} |\nabla_\lambda \eta|^2 \, dx, & \text{se } \beta = -1 \end{cases}$$

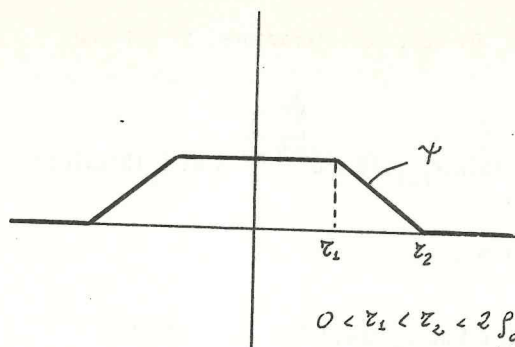
dove $\nabla_\lambda = (\lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \lambda_n \frac{\partial}{\partial x_n})$ e

$$(5.4) \qquad w = \begin{cases} u^{\frac{\beta+1}{2}}, & \text{se } \beta \neq -1 \\ \log u, & \text{se } \beta = -1 . \end{cases}$$

Supponiamo ora $Lu \geq 0$.

Per il Teorema di immersione esiste $q > 2$ tale che

$$(5.5) \qquad \begin{aligned} &\|\eta w; L_q(R^n)\| \leq C(\|\eta w; L_2(R^n)\| + \| \nabla_\lambda(\eta w); L_2(R^n)\|) \\ &\leq (\text{se diam(supp } \eta) << 1) \leq C_1 \| \nabla_\lambda(\eta w); L_2(R^n)\| \leq \\ &\leq C_1(|\eta \ \nabla_\lambda(w); L_2(R^n)\| + \|w \ \nabla_\lambda(\eta); L_2(R^n)\|) \leq \\ &\leq (\text{per (5.3)}) < C_2(1 + |\tfrac{\beta+1}{\beta}|) \|w \ \nabla_\lambda(\eta); L_2(R^n)\| \end{aligned}$$

Fissato $x \in \Omega$ e $\rho_0 > 0$, $\rho_0 << 1$, tale che $S(x, 4\rho_0) \subset \Omega$, poniamo $\eta(y) = \psi(d(x,y))$ dove $\psi \in C_0^{(1)}(R)$ è una funzione del tipo di quella indicata in figura

Allora, poiché $|\nabla_\lambda d| < C$, $|\nabla_\lambda \eta| < \frac{C}{r_2-r_1}$. Quindi, per la (5.5)

$$\| w; L_q(S(x,r_1))\| \leqslant \frac{C(\rho_0)}{r_2-r_1}(1 + |1+\frac{1}{\beta}|)\| w; L_2(S(x,r_2))\| .$$

Ora, poiché $w = u^{\frac{\beta+1}{2}}$ $(\beta > 0)$, posto $p = \beta + 1$ e $m = \frac{q}{2}(> 1!)$, questa disuguaglianza si può scrivere nella forma seguente:

$$(5.6) \quad \|u; L_{mp}(S(x,r_1))\| \leqslant (\frac{C(\rho_0)}{r_2-r_1}(1 + \frac{p}{p-1}))^{\frac{2}{p}} \| u; L_p(S(x,r_2))\|$$

Poiché, per $p = 2$, il secondo membro è $< +\infty$ $(u \in L_2^{loc}(\Omega))$, questa disuguaglianza prova, intanto, che $u \in L_p^{loc}(\Omega)$ $\forall p > 1$ in quanto $m > 1$.

D'altra parte, posto, per ogni $k \in N \cup \{0\}$,

$$p_k = pm^k \text{ e } r_k = \rho(1 + \frac{1}{2^k}), \quad \rho \in]0, \rho_0[,$$

sempre dalla (5.6) si trae

$$\| u; L_{p_{k+1}}(S(x,r_{k+1}))\| \leqslant (2^k C_1/\rho))^{\frac{1}{m^k}} \| u; L_{p_k}(S(x,r_k))\|$$

per ogni $k \in N \cup \{0\}$. Di qui, per iterazione, si ottiene

$$\| u; L_{p_{k+1}}(S(x,r_{k+1}))\| < C^{\sum_{j=0}^{k} \frac{j}{m^j}} \| u; L_p(S(x,2\rho)\|$$

e quindi, per $k \to +\infty$,

$$\sup_{S(x,\rho)} u \leqslant C \| u; L_p(S(x,2\rho))\| \quad (C = C(\rho_0))$$

Ciò prova il Teorema 5.1.

Procedendo in modo analogo nel caso $Lu \leqslant 0$ e $u \geqslant k > 0$ (in questo caso $\beta < 0$) si ottiene

$$\inf_{S(x,\rho)} u = \lim_{p\to+\infty} \left(\int_{S(x,\rho)} u^{-p}\, d\mu\right)^{-\frac{1}{p}} \geqslant$$

$$\geqslant C\left(\int_{S(x,3\rho)} u^{-p_o}\right)^{-\frac{1}{p_o}}$$

per ogni $p_o > 0$ $(C = C(\rho_o, p_o))$.

Si ottiene inoltre, per ogni p e p_o: $0 < p_o < p < \frac{q}{2} = m$,

$$\left(\int_{S(x,2\rho)} u^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C\left(\int_{S(x,3\rho)} u^{p_o}\, d\mu\right)^{\frac{1}{p_o}}$$

$(C = C(\rho_o, p_o))$.

Allora, se valesse la seguente disuguaglianza

$$\left(\int_{S(x,3\rho)} u^{p_o}\, d\mu\right)^{\frac{1}{p_o}} \leqslant C\left(\int_{S(x,3\rho)} u^{-p_o}\, d\mu\right)^{-p_o}, \tag{5.7}$$

sarebbe provato anche il Teorema 5.2 (con $p^* = \frac{q}{2}$).

Ma (5.7), in virtù della Proposizione 3.3 è vera se la funzione $w = \log u$ è ad oscillazione media limitata rispetto alle sfere della distanza d.

D'altra parte, per la (5.3), scegliendo $\eta = \psi(d)$ con ψ definita come in precedenza prendendo $r_1 = r$ e $r_2 = 2r$, risulta

$$(5.8) \qquad \int_{S(x,r)} |\nabla_\lambda w|^2 \, d\mu \leqslant \frac{C(\rho_o)}{r^2} \mu(S(x,2r)) \leqslant \frac{C_1(\rho_o)}{r^2} \mu(S(x,r))$$

per ogni $r < \rho_o$.

Si verifica ora facilmente che è

$$\int_{S(x,r)} |w - w_r| \, d\mu \leqslant \left(\iint_{S(x,r)xS(x,r)} |w(z) - w(y)|^2 \, dz \, dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ora, con una tecnica analoga a quella utilizzata per mostrare il Teorema di immersione, si riconosce che il secondo membro dell'ultima disuguaglianza si maggiora con

$$r(\mu(S(x,r)))^{\frac{1}{2}} \left(\int_{S(x,2r)} |\nabla_\lambda w|^2 \, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Allora, per la (5.8),

$$\int_{S(x,r)} |w - w_r| \, d\mu \leqslant (C_1/\rho_o))^{\frac{1}{2}} (\mu(S(x,r)))^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot (\mu(S(x,2r)))^{\frac{1}{2}} \leqslant C_2(\rho_o) \, \mu(S(x,r)) .$$

Ciò prova che w è ad oscillazione media limitata rispetto alle sfere $S(x,\rho)$. La dimostrazione, così, è completa.

Dai Teoremi 5.1 e 5.2 si deduce immediatamente la disuguaglianza di Harnack (Teorema 2.2). Da questa, dopo aver mostrato, sfruttando opportune "omotetie" che trasformano le sfere $S(x,\rho)$ nelle sfere $S(x,1)$, che, per le costanti $M_1(\rho)$ ed $M_2(\rho)$, valgono le seguenti stime

$$M_1(\rho) \sim M_2(\rho) \sim (\mu(S(x,\rho)))^{\frac{1}{2}} ,$$

procedendo come nel caso ellittico, si deduce il Teorema di hölderianità.

BIBLIOGRAFIA

[1] COIFMAN-WEISS: Analyse Harmonique Non-Commutative sur Certain Espaces Homogènes, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1971).

[2] FEFFERMAN-PHONG: Pseudo-Differential Operators with Positive Symbols, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, n. 23 (1981).

[3] GILBARG-TRUDINGER: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1977).

[4] HÖRMANDER: Hypoelliptic Second-Order Differential Equations, Acta Math. 119 (1967).

[5] KOLODIǏ: Certain Properties of Generalized Solutions of Degenerate Elliptic Equations, Dokl. Akad. Nauk SSSR 197 (1971).

[6] JOHN-NIRENBERG: On Functions of Bounded Mean Oscillation, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961).

[7] MURTY-STAMPACCHIA: Boundary Value Problems for Some Degenerate. Elliptic Operators, Ann. Mat. Pura Appl. 80 (1968).

[8] NAGEL-STEIN-WAINGER: Boundary Behavior of Functions Holomorphic in Domains of Finite Type, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 78 (1981).

[9] SUSSMAN: Orbits of Families of Vector Fields and Integrability of Distributions, Trans. Aner. Math. Soc. 180 (1973).

[10] TRUDINGER: Linear Elliptic Operators with Measurable Coefficients, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 27 (1973).